

ESTIMATIVAS DE CHEBYSHEV E O POSTULADO DE BERTRAND

FERNANDO FERREIRA

Dado $n \in \mathbb{N}$, define-se $\pi(n)$ como sendo o número de primos que não excedem n . No final do século XIX, Jacques Hadamard e Charles de la Vallée-Poussin demonstraram um resultado célebre:

Teorema do número primo.

$$\lim_n \frac{\pi(n) \ln n}{n} = 1.$$

Também se escreve $\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$. Este teorema diz que, assintoticamente, $\pi(n)$ está próximo do número $\frac{n}{\ln n}$. Uma maneira equivalente de exprimir este facto é dizer que, para todos os números reais positivos c e C com $c < 1 < C$, se tem

$$(*) \quad c \frac{n}{\ln n} < \pi(n) < C \frac{n}{\ln n}$$

para n suficientemente grande. O teorema é um resultado sobre a distribuição dos números primos e tem várias consequências interessantes. Uma delas é que (pelo menos a partir de certa ordem) há sempre números primos entre n e $2n$. Com efeito:

$$\pi(2n) - \pi(n) > c \frac{2n}{\ln 2n} - C \frac{n}{\ln n} \geq \frac{4c}{3} \frac{n}{\ln n} - C \frac{n}{\ln n} = \left(\frac{4c}{3} - C \right) \frac{n}{\ln n}.$$

A desigualdade do meio é justificada pelo facto de se ter $\frac{2}{\ln 2n} \geq \frac{4}{3 \ln n}$ para $n \geq 4$, como o leitor pode facilmente confirmar. Se tomarmos constantes c e C com $c < 1 < C$ e $\frac{4c}{3} > C$, vem que $\pi(2n) - \pi(n) > 0$. Logo, há números primos entre n e $2n$.

A demonstração do teorema do número primo está para além do âmbito deste curso. A prova original usa métodos de análise complexa (que iremos aflorar em lições posteriores). Porém, já em meados do século XIX, o matemático Pafnuty Chebyshev obteve uma versão fraca do teorema do número primo. Chebyshev exibiu constantes $c < 1 < C$ que tornam a desigualdade (*) verdadeira. Os resultados de Chebyshev baseiam-se em métodos elementares e são suficientes para demonstrar o chamado postulado de Bertrand:

Postulado de Bertrand. *Para todo o número natural n diferente de 1, existe pelo menos um primo p tal que $n < p < 2n$.*

O postulado de Bertrand é realmente um teorema (demonstrado pela primeira vez por Chebyshev), mas esta é a forma tradicional de referir o resultado. No que se segue, vamos enunciar e justificar uma série de resultados auxiliares que nos vão permitir demonstrar este teorema.

Proposição 1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}$.*

Demonstração. $4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2 + \sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{k} \leq 2 + (2n-1) \binom{2n}{n} \leq 2n \binom{2n}{n}$, onde se usa o facto de que $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$ e de que $2 \leq \binom{2n}{n}$. \square

Lema 1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n+1}{n} \leq 4^n$.*

Demonstração. $\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{2} \left(\binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} \right) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \frac{1}{2} 2^{2n+1} = 2^{2n} = 4^n$. Note-se que $\binom{2n+1}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$. \square

Lema 2. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{\substack{n+1 < p \leq 2n+1 \\ p \text{ primo}}} p \mid \binom{2n+1}{n}.$$

Demonstração. Basta ver que, para todo o número primo p com $n+1 < p \leq 2n+1$ se tem $p \mid \binom{2n+1}{n}$. Visto que $p \mid (2n+1)(2n) \cdots (n+2)$ e $n! \mid (2n+1)(2n) \cdots (n+2)$ (pois o produto de n números consecutivos é sempre múltiplo de $n!$) e visto que $n! \perp p$, sai $(p \cdot n!) \mid (2n+1)(2n) \cdots (n+2)$. O resultado agora é imediato. \square

Proposição 2. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ primo}}} p \leq 4^n.$$

Demonstração. Por indução em n . Os casos $n = 1, 2$ são verdadeiros. Se n não é primo então

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ primo}}} p = \prod_{\substack{p \leq n-1 \\ p \text{ primo}}} p \leq 4^{n-1} \leq 4^n,$$

onde a penúltima desigualdade é por hipótese de indução. Se n é primo, com $n > 2$, n é ímpar e portanto da forma $n = 2m + 1$. Vem:

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ primo}}} p = \prod_{\substack{p \leq m+1 \\ p \text{ primo}}} p \cdot \prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \text{ primo}}} p \leq 4^{m+1} \binom{2m+1}{m} \leq 4^{m+1} 4^m = 4^{2m+1} = 4^n.$$

A primeira desigualdade justifica-se por hipótese de indução (completa) e pelo Lema 2. A segunda desigualdade usa o Lema 1. \square

Proposição 3. Seja p um número primo e suponhamos que $p^r \mid \binom{n}{k}$, onde n, r e k são números naturais com $k \leq n$. Nestas condições, tem-se $p^r \leq n$.

Demonstração. Seja l inteiro máximo tal que $p^l \mid m$ para certo m com $n - k + 1 \leq m \leq n$. Considerem-se a e b os inteiros não negativos tais que $m + b = n$ e $m - a = n - k + 1$. Vem $k = a + b + 1$ e

$$\binom{n}{k} = \frac{(m+b) \cdots (m+1) m (m-1) \cdots (m-a)}{(a+b+1)!}.$$

Como $(a+b+1)! = (a+b+1)(a+b) \cdots (a+1) a!$ e visto que $b! \mid (a+b) \cdots (a+1)$, sabemos que existe um inteiro q tal que $(a+b+1)! = b! a! q$.

Logo

$$\binom{n}{k} = \frac{(m+b) \cdots (m+j) \cdots (m+1) \cdot (m-1) \cdots (m-i) \cdots (m-a)}{b \cdots j \cdots 1 \quad 1 \cdots i \cdots a} \cdot \frac{m}{q}.$$

Ou seja:

$$(b \cdots j \cdots 1)(1 \cdots i \cdots a) q \binom{n}{k} = (m+b) \cdots (m+j) \cdots (m+1) \cdot (m-1) \cdots (m-i) \cdots (m-a) \cdot m$$

Dado que, por hipótese, $p^r \mid \binom{n}{k}$, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que

$$(b \cdots j \cdots 1)(1 \cdots i \cdots a) q s p^r = (m+b) \cdots (m+j) \cdots (m+1) \cdot (m-1) \cdots (m-i) \cdots (m-a) \cdot m$$

Se uma potência do primo p divide algum $m+j$ ($1 \leq j \leq b$), como essa potência também divide m (por definição de l e m), sai que essa potência divide j . De igual modo, se uma potência de p divide $m-i$ ($1 \leq i \leq a$) então também divide i . Em suma, cada um dos fatores de p no produto $(m+b) \cdots (m+j) \cdots (m+1) \cdot (m-1) \cdots (m-i) \cdots (m-a)$ está correlacionado (de modo injetivo)

com um fator do produto $bla!$. Depois de cancelar todos estes fatores p , ficamos com $tqsp^r = vm$, para certos $t, v \in \mathbb{N}$ e $p \perp v$. Como $p^r \mid vm$, sai $p^r \mid m$. Vem $p^r \leq m \leq n$. \square

Estamos agora em condições de demonstrar o postulado de Bertrand. Dado n um número natural (supomos $n \geq 5$), considere-se o coeficiente binomial $\binom{2n}{n}$. Claramente, os seus fatores primos p são menores ou iguais a $2n$. Admitamos, com vista a um absurdo, que não existem primos entre n e $2n$. Assim, os fatores primos p de $\binom{2n}{n}$ dividem-se em três casos:

- (1) $p \leq \sqrt{2n}$.
- (2) $\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n$.
- (3) $\frac{2}{3}n < p \leq n$.

Pela Proposição 3, se uma potência p^r dum primo p divide $\binom{2n}{n}$, então $p^r \leq 2n$. Note-se que, em particular, no segundo caso, vem $r \leq 1$. Por sua vez, o terceiro caso não se dá, ou seja, não existem fatores primos p de $\binom{2n}{n}$ tais que $\frac{2}{3}n < p \leq n$. Com efeito, tem-se $\binom{2n}{n}n! = (2n)!$. Na decomposição em fatores primos de $(2n)!$ o primo p aparece exatamente duas vezes, nomeadamente em p e $2p$ ($3p$ já excede $2n$). Na decomposição em fatores primos de $n!n!$ o primo p também aparece duas vezes (uma vez em cada $n!$). Logo, o fator p não aparece na decomposição em primos de $\binom{2n}{n}$.

A fatorização de $\binom{2n}{n}$ em produto de primos é, pois, da forma:

$$\binom{2n}{n} = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} q_1 \cdots q_s,$$

os p_i s e os q_j s são diferentes dois a dois, cada p_i está no caso (1) e cada q_j está no caso (2). Vem, usando a Proposição 2 para justificar a última desigualdade:

$$\binom{2n}{n} = (p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k})(q_1 \cdots q_s) \leq (2n)^{\pi(\lfloor \sqrt{2n} \rfloor)} \prod_{\substack{q \leq \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor \\ q \text{ primo}}} q \leq (2n)^{\sqrt{2n}} 4^{\frac{2}{3}n}.$$

Assim,

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}} 4^{\frac{2}{3}n},$$

pela Proposição 1. Sai facilmente $2^{2n} \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} 2^{\frac{4}{3}n}$ e, portanto, $2^{\frac{2}{3}n} \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}}$. Passando a logaritmos fica-se com

$$\frac{2}{3}n \ln 2 \leq (1 + \sqrt{2n}) \ln(2n).$$

Esta desigualdade é verdadeira para $n = 467$ e falsa para $n = 468$. Dado que a curva definida pela função de variável real positiva $x \rightsquigarrow (1 + \sqrt{2x}) \ln(2x)$ é côncava (pois a segunda derivada desta função é negativa: é um exercício), a desigualdade acima é falsa para todos os valores inteiros n com $n \geq 468$. Em suma, a negação do postulado de Bertrand leva a absurdo para $n \geq 468$ e, portanto, o postulado é verdadeiro para estes valores. O postulado também vale para $n \leq 467$. Para ver isso basta considerar a seguinte sucessão de primos:

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631.$$

O postulado de Bertrand está assim demonstrado.